En el concurs internacional obert a Stockholm, en 1889, pel rei de Suècia, Poincaré obtingué el premi per sa cèlebre memòria: *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique.*

(Hom sap que, al costat de la memòria de Poincaré, es concedí una recompensa a la memòria d'Appell; de manera que el concurs es resolgué a glòria de la Ciència francesa.)

La memòria *Sur le problème des trois corps...* és la continuació de les quatre memòries *Sur les courbes définies par une équation différentielle,* i ve seguida de la gran obra *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* Es ben efectivament una renovació dels mètodes de la Mecànica del cel. Desgraciadament, aquest perfeccionament dels mètodes posa en evidència l'extrema dificultat del problema, la solució del qual sembla així allunyar-se a mesura que més podem apropar-nos-hi.

Es allí que, finint la primera via de què havíem parlat, Poincaré demostra que no solament, ultra les deu integrals algèbriques conegudes de les equacions dels tres cossos, no n'hi ha d'altres (ço que ja havia estat demostrat per Bruns), sinó, demés, que no hi ha altres integrals uniformes, estudiant el desenrotllament que hauria de tenir una tal integral (cal, per a això, saber calcular els termes d'ordre tan elevat com hom vulgui de la funció pertorbadora, cosa que ha fet Poincaré seguint un anàlisi els primers elements del qual són deguts a Darboux). Aquesta conseqüència es troba també a posteriori com a resultat de la discussió de les trajectòries.

Es, en raonar sobre aquestes, en fer-se càrrec de la disposició de les corbes, de llur manera d'enrotllar-se, de tallar-se, etc., que hom pot veure com hauria estat debades el cercar solucions en el sentit clàssic.

La sola existència de les solucions asimptòtiques n'és una prova. Però, demés, entre aquestes solucions n'hi ha, efectivament, de doblement asimptòtiques, que, després d'haver-se allunyat d'una solució periòdica a la qual eren asimptòtiques per a $t = -\infty$, hi tornen per $t = \infty$. Ara bé: l'ordre segons el qual hom pot imaginar-les traçades respectivament en superfícies A i B queda canviat d'una manera extremadament complicada en el cas de doble asimptotisme. Cada una de les superfícies en qüestió no es talla mai a ella mateixa, però és tallada per l'altra una infinitat de vegades, de manera que entre dues qualssevulla d'aquestes interseccions n'hi hagi una infinitat d'altres. Ací, com en moltes altres circumstàncies, els resultats de Poincaré, estan en els límits no solament de ço que hom pot demostrar, sinó de ço que hom pot imaginar o concebre. Diguem aquí, amb Poincaré, que ells són la prova de la complexitat del problema dels tres cossos i de la impossibilitat de resoldre'l amb els instruments usuals de l'Anàlisi.

No menys desencoratjant és la conclusió establerta per Poincaré relativament a les sèries trigonomètriques, per les quals hom intenta, amb els mètodes comuns, de representar les solucions, i això des del començament de sa obra (t. I del *Bulletin Astronomique*). Ja hem trobat aquestes sèries en parlar del mètode de Lindstedt. La qüestió principal, des del punt de vista del gran problema qualitatiu de l'estabilitat del sistema solar, és la de saber si la quantitat així representada resta finita per a totes les valors del temps.

Hom havia considerat com a evident (pel fet que cos $\alpha_n t$ i sin $\alpha_n t$ estan sempre entre -1 i $+1$) que això es compleix, certament, per la suma de la sèrie

$$\Sigma A_n \cos \alpha_n t + B_n \sin \alpha_n t$$

des del moment que aquesta sèrie es convergent, qualsevol que sigui t. Es aquesta conclusió (insuficient *per se* per a resoldre la qüestió, car ja hem vist que aquella convergència és molt dubtosa en el cas de la Mecànica del cel) que Poincaré demostra ésser inexacta, fins i tot si hom suposa la convergència absoluta.

Es ben certa per a la sèrie dels cossinus, que llavors resta sempre inferior a $\Sigma |A_n|$; però passa ben altrament en la sèrie dels sinus si (com s'esdevé en realitat) els coeficients, α_n, o alguns d'entre ells, tendeixen vers zero.

Els termes d'una sèrie tal com

$$\Sigma 2^n \sin \frac{t}{3^n}$$

per a valors de n molt grans, equivalen a

$$t\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Es a dir que hi ha convergència (i convergència absoluta) per a tota valor finita de t; però aquesta convergència és tant més lenta com més gran és t: no és *uniforme*.

Per a la sèrie així formada, Poincaré demostra que no pot ésser limitada quan t augmenta indefinidament; i això passa quan els coeficients B_n no són limitats. Aquests coeficients B_n s'expressen, efectivament, mitjançant les valors de la sèrie considerada

$$f(t) = \Sigma A_n \cos \alpha_n t + B_n \sin \alpha_n t$$

amb promedis, absolutament com per a les sèries de Fourier ordinàries, llevat que els promedis, en lloc d'ésser presos per a un període (el qual aquí no existeix), són presos per a un interval de temps infinit, és a dir,

$$B_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f(t) \sin \alpha_n t \, dt .$$

No és, doncs, possible que $|f(t)|$ sigui sempre inferior a un nombre fixe M, si tal cosa no s'efectua per a $\frac{B_n}{2}$.

En particular, Poincaré demostra fàcilment, amb exemples, que els coeficients de les sèries de Lindstedt, i, en conseqüencia, aquestes sèries, poden no ésser limitats.

Som així portats a estudiar la qüestió de l'estabilitat i, primerament, a distingir, amb Poincaré, els distints sentits que hom pot donar a aquest mot. El primer que es presenta és el de Laplace, qui havia demostrat fins als termes de primer ordre que els grans eixos (per exemple) de les órbites planetàries no seran mai molt diferents del que són ara. Però cal distingir altres espècies d'estabilitat.

Quan Poisson demostrà que l'estabilitat era també certa en tenir en compte els termes de segon ordre, el mot ja no tenia el mateix sentit que per a Laplace. No significava que el sistema solar no podia allunyar-se enormement de son estat actual, sinó solament que retornaria a apropar-s'hi molt, i això una infinitat de vegades.

Encara podem distingir-ne un altra espècie. Es la que hom pot anomenar *estabilitat a la Liapounoff*. Correspon a les órbites infinitament próximes a una trajectòria determinada qualsevulla: hom tracta de saber si, per una petita pertorbació, les òrbites que s'obtenen s'allunyen sempre, a mesura que augmenta el temps, de la solució fonamental, o si, al contrari, quedaran sempre poc diferents.

L'estabilitat a la Liapounoff és l'única de totes tres que generalitza al moviment la noció d'estabilitat de l'equilibri, car tot equilibri (estable o no) és evidentment estable a la Laplace o a la Poisson. En aquest sentit, el cas límit de l'equilibri seria d'una estabilitat a la Poisson, fins i tot si fos inestable; i no posseiria l'estabilitat a la Liapounoff sinó en cas de posseir demés, l'estabilitat d'equilibri, tal com ha estat formulada per Lagrange i Dirichlet.

L'estabilitat a la Liapounoff va estretament lligada a les solucions de les equacions a les variacions, de conformitat amb ço que hem vist en la darrera conferència, més especialment, dels exponents característics.

La qüestió de l'estabilitat a la Poisson donarà a la teoria dels invariants integrals ocasió per a un dels seus més bells triomfs. Si hom suposa un invariant integral, tal com el volum o un altre invariant integral del mateix ordre (ès, ja ho sabem, el cas de les equacions de la Dinàmica), i si, estès a la multiplicitat que el móbil pot descriure, aquest invariant integral és finit (ço que hom pot sovint demostrar tenint esment del teorema de les forces vives), hi ha estabilitat a la Poisson, o, almenys, les solucions que no tenen estabilitat a la Poisson formen un conjunt de mesura nul·la, o (ço que és el mateix) la probabilitat d'una d'aquestes trajectòries és infinitament petita.

La demostració és de remarcable simplicitat. Sigui V el volum total (valor total de l'invariant integral); sigui v un volum molt petit arbitrari en V. Poden haver-hi trajectòries que, sortint de v, ja no hi tornin més: sigui v' el volum que formen a l'interior de v llurs punts de partida. Al cap del temps T (escollit a priori tan gran com hom vulgui) i dels temps $2T, 3T, \ldots, kT$, múltiples d'aquell, v' haurà esdevingut $v'_1, \ldots, v'_k$; i tots aquests nous volums (equivalents entre ells, car hi ha invariant integral) no haurien de tenir punts comuns uns amb altres, puix tots són més petits que V, és a dir, tan petits com vulguem. Això és la conclusió demanada (*).

Tornem a les solucions periòdiques. Demostrada llur importància, hem d'arribar a trobar aquestes solucions.

Vejam com procedeix Poincaré.

Essent les masses pertorbadores molt petites, sigui μ un cert paràmetre que aquestes masses contenen en factor. Per a $\mu = o$ tindrem solucions conegudes: seran, per exemple, elipses de Kepler, és a dir, solucions periòdiques. Hom pregunta quines han d'ésser les valors inicials perquè existeixi una solució periòdica per a valors molt petites, però no nul·les, de μ.

Poincaré ha demostrat, pel mètode de les majorants, l'existència de la solució en el cas de les equacions generals

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \ldots\ldots = dt$$

(*) Jo he demostrat, en la meva memòria del *Journal de Math.* de 1897, que, perquè sigui exactament equivalent a l'estabilitat de Poisson, el raonament hauria d'ésser una mica perfeccionat: cosa que es fa, altrament, sense dificultat.

essent les $X, Y, Z, \ldots$ funcions periòdiques del mateix període T de t. Ço que cal és expressar les $x, y, z, \ldots$ en funció de les constants arbitràries i de μ.

Si hom fa variar aquestes, les noves x seran desenrotllables en funció de les variacions β_i, atribuïdes a les constants, i de μ. Podrem, doncs, determinar aquestes variacions β_i en funció de μ expressant que les x són periòdiques mentre el determinant funcional de les n equacions que hom troba sigui diferent de zero (condició que pot també expressar-se mitjançant els exponents característics, abans introduïts, dient que cap d'ells ha d'ésser nul o múltiple de $\frac{2i\pi}{T}$).

Aquest determinant pot, primerament, ésser nul perquè les equacions poden no ésser totes independents, per exemple si hom coneix una integral $F =$ const. per a tota valor del temps. Però en aquest primer cas hom pot pendre la valor d'aquesta constant com a paràmetre independent, de manera que la relació $F =$ const. (o, millor, la variació de F igualada a una constant) substitueix una de les equacions.

Una de les equacions que expressa la periodicitat és, llavors, una conseqüència de les altres (i el mateix per a $2, 3, \ldots q$ d'aquestes equacions si existeixen $2, 3, \ldots q$ integrals uniformes conegudes).

Existeix, en aquest cas, una infinitat de solucions periòdiques dependents d'una constant arbitrària i per a μ bastant petit. El període d'aquestas funcions és el mateix que el de $X, Y, \ldots$

Això és, precisament, ço que ocorre quan les equacions prenen la forma canònica de les equacions de la Dinàmica.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

F és una funció de $x_1, \ldots; y_1, \ldots,$ i μ; desenrotllable segons les potencies de μ:

$$F = F_0 + F_1\mu + \ldots$$

essent F_0 una funció de les x_i i funció periòdica dels paràmetres y_i, de la qual coneixem la integral $F =$ const.

Al contrari, hi ha una dificultat, degut que t no figuri explícitament en F; i és que, si hom canvia l'origen dels temps, res serà alterat en les fórmules. D'aquí que, si existeix una solució periòdica, n'existirà una infinitat formant una succesió contínua. D'això resulta que el determinant funcional ja no és diferent de zero; ço que és semblant al cas en què tres superfícies no es tallen en un punt, sinó segons una corba; tallant-se llavors els plans tangents necessàriament en una mateixa recta. Per això cal cercar no solucions de períodes no iguals a la primitiva, sinó lleugerament diferents, i que hom pren com a nova incògnita. Si per a $\mu = o$ existeix en aquest cas una solució de període T, hom pot, per cada valor de la integral $F =$ const., afirmar que, per a μ bastant petit, hi haurà també una integral periòdica de període, en general, diferent de T.

Però, després d'haver així ensenyat a evitar la dificultat que resulta de la presència d'una infinitat de solucions periòdiques per a $\mu = o$ i del determinant funcional nul, Poincaré ens ensenyarà a abordar-la.

Considerem les constants arbitràries i μ com a coordenades d'una varietat de $m+1$ dimensions. Les valors que donen solucions periòdiques estaran situades segons una corba, per a $\mu = o$, per exemple; si $\mu \neq o$, sobre altres corbes; i així succesivament. En tots els punts d'una qualsevulla d'aquestes corbes, les valors de les $m-1$ constants inicials, per exemple, estaran perfectament determinades, si un cert determinant funcional no és nul.

¿Què és ço que s'esdevé quan aquest determinant s'anul·la?

La qüestió és saber si la corba Φ en qüestió tindrá un *punt múltiple*.

Vejam, primer, què passa en una corba $F(x, y) = o$ en el pla quan hom ha trobat un punt (x_o, y_o) per al qual

$$\frac{\partial F}{\partial y} = o,$$

ço que vol dir tangent vertical, en general. Però suposem, 1er, que existeix una primera branca de corba que satisfà a l'equació, que passa pel punt considerat i que dóna per cada valor de x una valor de y, a una i altra banda d'aquest punt; 2n, que $\frac{\partial F}{\partial y}$ s'anul·la canviant de signe: llavors, necessàriament, una segona branca vindrà a tallar la primera en aquest punt.

Es un dels cèlebres *punts de bifurcació* que Poincaré retroba en altres estudis de Mecànica del cel, particularment en les figures el·lipsoïdals de Jacobi, a les quals vénen a *confluir* les figures piriformes inestables descobertes per Poincaré.

El problema dels tres cossos admet una infinitat de solucions periòdiques per a μ petit.

Una aplicació dels mètodes precedents en circumstàncies un xic diferents es presenta per als sistemes (no és el cas del sistema solar) que admeten posicions d'equilibri, és a dir, si totes les $X, Y, Z, \ldots$ s'anul·len per a $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = o$ qualsevulla que sigui μ, i no entrant explícitament el temps en les X, Y, Z.

Hi ha llavors solucions periòdiques de període ω, poc diferent de zero, per a $\mu = o$. Cal, per a això, que totes les arrels d'una certa equació anàloga a l'equació en s siguin imaginàries pures; ço que dóna

$$\omega_j = \frac{2ki\pi}{s_j}.$$

Les equacions no contenen t explícitament; doncs, si existeix una solució periòdica n'existirà una infinitat.

Encara hi ha quelcom més. Reprenguem la nostra solució periòdica inicial (per a $\mu = o$) de període T: per a admetre el període T, ha d'admetre el període kT, qualsevulla que sigui el nombre enter k.

Fins aquí hem cercat (per a $\mu \neq o$) solucions que admeten un període igual a T o pròxim a T. Podem ésser menys exigents i demanar solament que tinguin el període kT o pròxim a kT. Tota una sèrie de noves solucions apareixeran així. Aquí es manifesta igualment la importància de la noció, precedentment introduïda per Poincaré, dels punts múltiples de la corba Φ. Uns tals punts múltiples podien, precedentment, presentar-se cada vegada que un exponent característic fos múltiple de $\frac{2i\pi}{T}$: aquesta vegada això ocorrerà quan un exponent serà múltiple de $\frac{2i\pi}{kT}$. Com que aquests múltiples poden ésser molt poc diferents els uns dels altres per a k gran, els punts múltiples (l'existència dels quals estableix Poincaré, invocant els invariants integrals) són en nombre infinitament creixent, i les branques de la corba Φ formaran una xarxa infinitament espessa, distribuïda com ho són els nombres commensurables en la successió dels nombres. Hom té així una sèrie indefinidament complicada de sistemes de solucions periòdiques, la periodicitat de les quals és, en certa manera, cada vegada més feble, car es manifesta amb finals més i més llunyans.

Es fàcil compendre que un tal resultat il·lumina amb nova claror els precedents i obra noves perspectives. Hem vist com Poincaré refereix a les solucions periòdiques totes aquelles que en són suficientment veïnes.

Doncs ara veiem que les solucions periòdiques s'aprcpen les unes a les altres, d'una manera infinitament densa. ¿No és possible, així, acostar-se a qualsevulla trajectòria (mentre sigui estable) almenys durant un temps molt llarg?

Un tal resultat equivaldria, en un sentit, a la integració completa del sistema diferencial, car permetria una representació aproximada de qualsevulla solució.

Les coses passen de tal faisó en alguns problemes de la Dinàmica: això és ço que jo he constatat per a les geodèsiques de les superfícies de curvatures oposades. Entre les geodèsiques de tal superfície n'hi ha una infinitat que se'n van a l'infinit; però les altres es deixen aprcpar, com acabem de dir.

En ço que pertoca al cas general, un treball de Birkhoff, tot i modificant aquest punt de vista primitiu de Poincaré, en demostra ben bé la fecunditat: solament que ja no són moviments periòdics els que Birkhoff pren com a moviments d'aproximació, sinó altres moviments més generals (moviments *recurrents*), dels quals, la definició, més delicada, ens portaria massa lluny.

Un examen superficial podria fer-nos creure que hem exhaurit així totes les solucions periódiques del problema de la Mecànica del cel corresponents a les valors suficientment petites de μ, o almenys totes aquelles que formen sèries contínues. Sabem, efectivament, que tota sèrie de tal espècie ha de donar, en el límit, per a $\mu = o$, una sclució periòdica del problema primitiu, que és aquell en què no es tenen en compte les pertorbacions.

Ara bé: sembla que hem passat revista a totes les solucions d'aquest problema primitiu, i que ha d'ésser suficient, en conseqüencia, cercar les que són veïnes d'aquelles per a μ pròxim a zero.

Però, en tota circumstància, l'obra de Poincaré ens demostra amb quines dificultats d'un gènere molt particular hom s'entrebanca quan, en qüestions encara tan misterioses per a nostra intel·ligència com aquelles a què ell es dedica, hom cerca a predir la solució per l'estudi dels casos particulars que ja es saben tractar. La simplificació es compra al preu d'una deformació, on pot succeir que tots els fenòmens esdevinguin desconeguts. Som obligats a acceptar l'article (el cas de les corbes definides per una equació diferencial del primer ordre és l'únic on Poincaré hagi pogut operar altrament) des del moment que, fora d'ell, estaríem condemnats a l'obscuritat absoluta; però havem de comptar amb les trampes a què ens exposa. Respecte a aquest punt, cap lectura és tan instructiva com la dels últims paràgrafs de la *Mémorie sur le problème des trois corps,* o el capítol corresponent dels *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

Una cosa fa suspecta, aquí, la conclusió provisional a què hem arribat fa un moment. Entre els paràmetres dels quals depèn l'estat del sistema, un cert nombre (les anomalies dels planetes en llurs òrbites osculatrius o les longituds dels perihelis o dels nodes d'aquestes òrbites) són angulars. Per tant, ja no seria necessari per a la periodicitat que aquests paràmetres tornessin a llurs valors primitives al cap del període T: és suficient que cadascun d'ells (o, millor, cada una de llurs diferències mútues) hagi augmentat de $2k\pi$, essent k un enter qualsevol. Però, en ço que pertoca a alguns d'entre ells (les longituds últimament mencionades), aquest enter k té sempre la valor zero quan hom tracta del moviment keplerià sense pertorbació. La mateixa cosa passa *a fortiori* per a totes les solucions periòdiques, l'existència de les quals ha estat fins ara establerta per a μ pròxim a zero; car k no pot passar, sense discontinuïtat, de zero a una valor entera no nul·la.

No obstant, l'absència, per a μ diferent de zero, de solucions periòdiques en les quals els enters k siguin qualssevulla, ens apareix, no solament com a molt poc probable, sinó com a completament absurda quan hom veu que l'anul·lació dels enters k és una conseqüencia de les propietats ben particulars del problema considerat, i ja no es compliria si es substituïa per un altre problema de Dinàmica infinitament pròxim.

Cal, doncs, que existeixin altres sistemas de solucions periòdiques que, per a $\mu = o$, degeneren en corbes límits distintes d'aquelles de què havem parlat fins aquí. Això és el que passa realment. Poincaré n'assenyala per primera vegada la raó en la conclusió de la *Mémoire sur le problème des trois corps.*

«Si $\mu = o$, és que les masses dels dos planetes són infinitament petites i que no poden actuar l'una sobre l'altra d'una manera sensible, posat que no estiguin a una distància infinitament petita l'un de l'altre. Però, si aquests planetes passen infinitament a la vora l'un de l'altre, llurs òrbites seran bruscament modificades com si haguessin xocat. Hom pot disposar de les condicions inicials de manera que aquests xocs es produeixin periòdicament, i hom obté així solucions discontínues que són veritables solucions periòdiques del moviment keplerià i que tenim dret a deixar de banda.»

Entorn d'aquestes corbes, compostes cada una de diverses el·lipses keplerianes i que presenten punts angulosos, s'agrupen les noves solucions periòdiques, anomenades *de segona espècie*, que Poincaré examina d'una manera soma en *Les Méthodes nouvelles*, per raó de llur poca analogia amb les òrbites observades, però que, com hom veu, no són menys d'un alt interès analític i l'estudi de les quals no està sense relació amb les recerques de Levi Civita, Bisconcini i Sundman.

Però (cal no oblidar-ho): tot això ens informa de les solucions periòdiques no més per a les petites valors de μ, i això mateix (tal com s'esdevé, generalment, en casos semblants) sense que sapiguem exactament en quin domini de variacions de μ aquestes consideracions són vàlides, ni, en conseqüencia (altrament que a títol de simple presumpció), si s'apliquen a les masses realment existents dels planetes. ¿Podem posar en evidència solucions periòdiques fins per a μ no molt petit?

Es aquest problema de la recerca de les òrbites periòdiques per a valors qualssevulla, i no molt petites, de μ, que ha preocupat Poincaré fins a sa darrera hora. Ha demostrat que per a resoldre'l n'hi hauria prou amb saber demostrar un teorema relatiu a tota transformació puntual biunívoca i contínua que, conservant les àrees, transforma en ella mateixa una corona circular, deixant els contorns, l'un interior a l'altre, fent avençar en un sentit els punts d'un contorn i en sentit contrari els del contorn oposat. El teorema diu que existeix un punt que no és alterat per la transformació. (El teorema de Kronecker permet afirmar que n'existeix un nombre parell.)

Poincaré parla així en sa última memòria dels *Rendiconti* (1912):

«Mai he presentat al públic un treball tan inacabat...

Sembla que, en aquestes condicions, hauria d'abstenir-me de tota publicació fins que hagués resolt la qüestió...: això estaria molt bé si jo estigués segur de poder reprende-la un día; però, a la meva edat, no puc respondre'n.»

Efectivament, aquests tristos pressentiments havien de realitzar-se. Quan aquesta memòria es publicà, Poincaré ja era mort.

Aquest teorema ha estat demostrat poc després per un geòmetra americà, Mr. Birkhoff.